Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$

1) a) Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f(x)=3-\frac{4}{e^x+1}$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Montrer que le point A(0,1) et un centre de symétrie de ζ_f

b) Ecrire l'équation de la tangente T au point A

4) Tracer T et ζ_f

5) a) Montrer que f admet une réciproque f^{-1} définie sur]-1,3[

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère

c) Montrer que pour tout x de]-1,3[on a $f^{-1}(x)=\ln(\frac{1+x}{3-x})$

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1+e^{\frac{x}{2}}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$; (unité graphique 1 cm)

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite D : y =x+1 est une asymptote à ζ_f au voisinage de $(-\infty)$

b) Etudier la position relative de ζ_f et D

3/a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}=+\infty$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; Interpréter graphiquement le résultat

4/ Tracer D et ζ_f

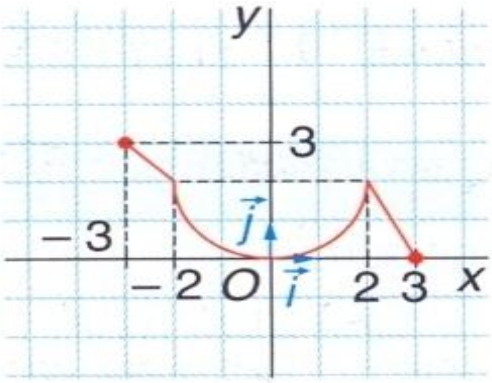
5/ Calculer l'aire de la région du plan limitée par ζ_f , la droite D et les droites d'équations x= - 1 et x = 2

6/ Soit $C=\{M(x,y) \text{ telque } y=f(x) \text{ et } 0\le x\le 1\}$

Calculer le volume du solide S obtenu par rotation de C autour de l'axe $(O,\vec{i})$

EXERCICE N°3

Soit f la fonction sur [-3 ; 3] et représentée ci-contre :
Sur [-2 ; 2], sa courbe représentative est un demi-cercle.



1) Calculer $\int_{-2}^{2} f(t)dt$ et $\int_{-3}^{3} f(t)dt$.

2) Soit g = – f. Calculer $\int_{-3}^{0} g(t)dt$.

3) soit h la fonction définie sur[-3 ; 3] par : h(x) = f(x) – 2

calculer $\int_{-3}^{3} h(x)dx$.

EXERCICE N°4

On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-2x}dx$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}dx$

1/ Calculer I_0 et I_1

2/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_{n+1} = \frac{1}{2}((n+1)I_n - e^{-2})$ et en déduire que $I_2 = \frac{1}{4}(1-5e^{-2})$

b) Donner la valeur de $J = \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-2x}dx$

3/a) Montrer que $\forall x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq x^n e^{-2x} \leq x^n$

b) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE N°5

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0.5 \\ U_{n+1} = U_n^2 \end{cases}$

1/a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < U_n \leq 0.5$

b) Montrer que U est une suite strictement décroissante

c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite l

2/ On pose $V_n = \ln(U_n)$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n < 0$
b) Montrer que V est une suite géométrique de raison 2
c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
d) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$